**1. Sea el conjunto A = {1, 2, 3, 4, 5}.**

**(a) Representa mediante una cadena de bits los subconjuntos ∅, {2, 3, 5}, {1, 5} y A.**

0 → 00000

{2,3,5} → 01101

{1,5} → 10001

A → 11111

**(b) Determina el número de subconjuntos no vacíos de A.**

2^5 - 1 = 31

**(c) Calcula cuántos subconjuntos de A contienen a los elementos 1 y 2.**

2^3-1 = 7

**2. Determina cuántos números capicúas hay con siete cifras.**

Capicúa con 7 cifras: (a,b,c,d,c,b,a)

Entonces, hay tantos como combinaciones de 4 cifras: 9\*10\*10\*10 = 9000.

**3. En un colegio se utilizan códigos formados por tres letras mayúsculas (de las 27 del alfabeto) seguidas de 4 cifras (del 0 al 9) para clasificar los historiales de los alumnos.**

**(a) ¿Cuántos expedientes se pueden codificar?**

27 ^ 3 \* 10^4 =78030000

**(b) ¿Y si en cada código no se repiten las cifras ni las letras?**

27\*26\*25\*10\*9\*8\*7= 88.452.000

**(c) ¿Cuántos códigos que cumplen la condición del apartado anterior no son de la forma A − − 1 − − 3?**

Son de la forma A- - 1 - - 3: 26\*25\*10\*9 = 58500

Luego no son de esta forma: 88.452.000-58500 = 87.867.000

**4. Demuestra que, dado cualquier conjunto de seis enteros positivos distintos, hay al menos dos cuya diferencia es un múltiplo de 5.**

Definimos los siguientes conjuntos:

{(0,5), (1,6), (2,7), (3,8), (4,9)}

Que hacen referencia a la última cifra del número entero seleccionado.

Por el principio del palomar, si intentamos repartir los 6 números tomados entre estas ‘cajas’ al menos 2 números estarán en el mismo conjunto.

En este caso, la diferencia de sus últimas cifras será 0 o 5, y será múltiplo de 5.

**5. Un estudiante de derecho estudió un total de 110 páginas para un examen durante 10 días consecutivos (cada día un número entero de páginas). Si sabemos que el último día estudió tantas páginas como el primero y menos de 10 páginas, demuestra que hubo un par de días consecutivos en los que estudió un total de, al menos, 23 páginas.**

El último día estudió las mismas páginas que el primero y menos de 10 páginas: estudió, como máximo, 18 páginas entre ambos días. Entonces, en los otros 8 días estudió, al menos, 110-18 = 92 páginas.

Al ser 8 días, podemos dividirlos en 4 pares de días consecutivos sin especificar cuáles son. Entonces, cada par de días consecutivos estudió, al menos, 92 / 4 = 23 páginas.

**6. Consideremos un conjunto de 5 números naturales diferentes {n1, n2, n3, n4, n5} cuya suma es 39. Demuestra que existen en este conjunto tres números cuya suma es al menos 24.**

Distribuímos el total de 39 entre 5 números. Nos queda que al menos un número debe ser mayor o igual que 8. Restamos este número al total.

Ahora, tenemos 4 números que suman al menos 31. Por el principio del palomar, existe al menos un número mayor o igual a 8. Tomamos que es 8 y continuamos.

Ahora, tenemos 3 números que suman al menos 23. Por el principio del palomar, al menos uno debe ser mayor o igual a 8.

Entonces, llegamos a la conclusión que hay 3 números que son mayores o iguales a 8. Entonces su suma será al menos 24.

**7. Si se eligen 10 puntos en el interior de un triángulo equilátero de lado 1, demuestra que hay puntos cuya distancia de separación es inferior a 1/3.**

La distancia dada entre 2 puntos debe ser menor o igual que 1.

Si el triángulo es de lado 1, podemos dividirlo en un total de 1+3+5=9 triángulos de lado ⅓, Tenemos 10 puntos, por lo que al menos 2 compartirán triángulo.

**8. El 18 de septiembre de 2000 entró en vigor un nuevo sistema de matriculación de vehículos en España. Es el llamado modelo “europeo”, sin distintivos provinciales, con la “E” de España sobre la bandera de la Unión Europea y una combinación de cuatro cifras (de 0000 a 9999) seguidas de tres letras (de BBB a ZZZ) de las que se excluyen las vocales (para evitar combinaciones malsonantes y acrónimos significativos), la Ñ (por confundirse con la N) y la Q (por confundirse con el 0).**

**(a) ¿Cuántas matrículas diferentes son posibles con este sistema?**

Letras: 27-1-1-5 = 20

20^3 \* 10\*4

**(b) ¿En cuánto podría incrementarse la cantidad si se permitiesen las vocales?**

25^3 \* 10^4

**(c) En ese caso, ¿cuántos vehículos habría entre 1990 USC y 2015 UDC?**

Entre 1990 USC y 1991 AAA: 22 \* 25\*6 \* 25^2\*4

Entre 1991 AAA e 2015 AAA: 24 \* 25^3

Entre 2015 AAA e 2015 UDC: 3 \* 4\*25 \* 20\*25^2

**9. Un profesor cuenta con 7 chicos y 10 chicas en un grupo de tutorías y decide seleccionar un equipo de trabajo formado por dos o tres alumnos. Calcula el número de posibilidades que tiene para hacer el equipo si quiere que en él haya, exactamente, un chico y no quiere que Xan trabaje con Usúe ni con Henar.**

Grupos de 2 personas:

7 \* 10 - 2 (grupos que combinan a Xan con Usué o Henar)

Grupos de 3 personas:

(7\*10\*9) / 2 - 18

total: (7\*10-2) + (7\*10\*9\* / 2) - 18

**10. El 30% del alumnado que se matricula por primera vez en el Grado en Ingeniería Informática aprueba todo en la primera oportunidad. Si en ninguna de las 10 asignaturas el porcentaje de suspensos entre los matriculados por primera vez supera el 15%, demuestra que hay al menos tres de esas asignaturas en las que este porcentaje no baja del 5%.**

El 70% del alumnado suspende al menos una. Hay al menos una asignatura con al menos 7% de suspensos, pero no más de 15%.

Entonces, hay al menos un 55% que suspende una de las otras 9. Entre esas al menos una asignatura tiene al menos 6%.

Entonces, hay al menos un 40 que suspende una de las otras 8. Entre esas al menos una asignatura tiene al menos 5%.

**Combinaciones y variaciones**

1. **Con los números 1, 2, 3, 4, 5 y 6, ¿cuántos números de tres cifras se pueden formar sin repetir las cifras? ¿Cuántos de ellos son múltiplos de 2?**

6\*5\*4.

Son múltiplos de 2 los que tienen 2,4,6 en la última cifra. 3\*5\*4.

1. **¿Cuántos números de 4 cifras existen tal que el producto de sus cifras centrales es par y el producto de las cifras externas es impar?**

Para que el producto de las cifras externas sea impar, deben ser ambas impares. Es decir, 5\*5 = 25 combinaciones posibles.

Para que el producto de las cifras centrales sea par, debe ser al menos una no impar. Es decir. 10\*10-5\*5 = 75 combinaciones posibles.

En total hay 25\*75 números.

1. **Calcula de cuántas maneras se puede elegir un cuadrado blanco y otro negro en un tablero de ajedrez de modo que los dos cuadrados no estén en la misma fila ni en la misma columna.**

Un tablero de ajedrez es 8x8 Una vez seleccionamos uno inicial (64 posibilidades), podemos elegir uno de otro color (32 posibilidades). Si no puede ser de la misma fila ni columna, eliminamos los 8 de distinto color que cumplen esta condición.

Nos quedan 64\*(32-8) posibilidades. Al no importar el orden, en realidad son 64\*24 /2.

1. **¿Cuántos códigos de longitud 7 se pueden escribir con los elementos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 si el producto de las cifras ha de ser exactamente 30?**

El producto de las cifras será 30 para las siguientes combinaciones:

2\*5\*3\*1\*1\*1\*1, 6\*5\*1\*1\*1\*1\*1.

El orden es irrelevante.

Para la primera combinación:

Calculamos las posibles posiciones de los 4 unos: cadenas de 7 bits con 4 1s: C(7,4) = 7! / (7-4)! /4! = 35

Ahora las posibles formas de ordenar los 3 dígitos: 3! = 6

En total hay 6\*35 = 210 números de longitud 7 con los digitos 2,5,3,1,1,1,1

Para la segunda combinación:

C(7,5) = 7! / (7-5)! / 5! = 21

Ordenar 2 dígitos: 2 formas

En total hay 42 números.

Entonces, el total será 210+42=252 números que cumplen la condición

**5.Un grupo de peregrinos está formado por 10 italianos y 8 argentinos. Cuando llegan al albergue tienen que formar una fila para coger habitación. ¿De cuántas formas se pueden colocar en la fila de modo que no se separen los peregrinos de la misma nacionalidad?**

Formas de ordenar a los italianos: 10!

Formas de ordenar a los argentinos: 8!

En total, 2\*10!\*8!

**6. Halla el número de divisores positivos de n = 24 53 112 . De estos, ¿cuántos terminan en 0?**

Son divisores aquellos que son de la forma 2^x \* 5^y \* 11^z con x<=4, y<=3, z<=2

Existen 5 \* 4 \* 3 = 60 números que cumplen esta condición.

Terminan en 0 aquellos que cumplen que son diisibles por 10, es decir, x e y son al menos 1. Entonces, son 4\*3\*3 = 36 números.

**7. ¿Cuántos pares ordenados de números enteros positivos (a, b) hay de forma que mcm(a, b) = 23 56 1112, donde mcm(a, b) denota el mínimo común múltiplo de a y b?**

a=2^x\*5^y\*11^z, b=2^x’\*5^y’\*11^z’ tales que max {x,x’} = 3, max{y,y’}=6 e max{z,z’} = 12.

Entón, un dos números x e x’ será 3, e o oturo será calqueira entre 0 e 3. As posibilidades son (0,3)(1,3)(2,3)(3,3)(3,2)(3,1)(3,0) = 7 para x. Isto é (3+1)\*2 -1 (polo caso repetido (3,3)).

Para y serán (6+1)\*2-1 = 13. Para z serán (12+1)\*2 -1 = 25. O número total de posibilidades son 7\*13\*25.

**8.En un club de magia formado por 27 aprendices y 10 magos se quiere elegir una comisión formada por 4 personas (presidente, secretario, tesorero y vocal) con el fin de elaborar la previsión de gastos del club para el año próximo.**

**(a) ¿De cuántas formas se puede elegir la comisión?**

V(37,4) = 37\*36\*35\*34

**(b) ¿De cuántas formas se puede elegir la comisión si se quiere que esté presidida por un mago?**

10\*36\*35\*34

**(c) ¿Y si se quiere que haya al menos un mago, aunque no sea el presidente?**

37\*36\*35\*34 - 27\*26\*25\*24

**(d) ¿Cuántas comisiones puede haber si el mago Ojeda y su hijo, el aprendiz Manuel, no pueden estar en la misma comisión?**

37\*36\*35\*34 - V(4,2) \* 1\*1\*35\*34= V(37,4) - 4!\* V(35,2)

**9.Sean n, m ∈ N. Determina el número de caminos distintos que hay para trasladarnos del punto P(0, 0) al punto Q(n, m), situados sobre una cuadrícula, considerando que únicamente podemos realizar dos tipos de movimientos: movimientos de izquierda a derecha y de abajo a arriba.**

Debemos desplazarnos n veces a la derecha y m veces hacia arriba en cualquier orden.

Existen C(m+n, m) formas de ordenar estos pasos.

**10. Teniendo en cuenta el ejercicio anterior, calcula el número de caminos distintos que podemos seguir para ir desde el punto (0, 0) al punto (5, 5) con la restricción añadida de que, si bien podemos tocar la diagonal en algún punto (k, k), además de (0, 0) y (5, 5), en ningún momento podremos cruzarla.**

Los caminos que cruzan la diagonal son aquellos que en cualquier punto dado han dado más pasos hacia arriba que hacia la derecha.

Si en un camino de este tipo invertimos los bits a partir del cual se cruza la línea, obtendremos siempre un resultado final con 6 1s y 4 0s. Entonces, el número de caminos prohibidos es igual a 10|6. Por esto, los caminos permitidos son 10|5-10|6.

**11. Resuelve las cuestiones siguientes:**

**(a) ¿De cuántas formas se pueden repartir cinco libros diferentes entre diez niños si ninguno de ellos puede recibir más de uno?**

V(10,5) = 10!/5!

**(b) ¿De cuántas formas se pueden repartir cinco libros diferentes entre diez niños si cualquiera de ellos puede recibir cualquier número de libros?**

VR = 10^5

**(c) ¿De cuántas formas se pueden repartir cinco ejemplares de un mismo libro entre diez niños si ninguno de ellos puede recibir más de uno?**

C(10,5) = 10|5

**(d) ¿De cuántas formas se pueden repartir cinco ejemplares de un mismo libro entre diez niños si cualquiera de ellos puede recibir cualquier número de ejemplares?**

CR(10,5) = soluciones a la ecuación x1+x2+x3+x4+x5=5

CR(10,5) = 10+5-1 | 5 = 14|5

**(e) ¿De cuántas formas se pueden repartir once ejemplares de un mismo libro entre seis niños si cada uno de ellos debe recibir, al menos, un ejemplar?**

Es lo mismo que repartir 5 ejemplares entre 11 niños.

CR(6,5)

**12. Para repartir entre 7 niños disponemos de 7 libros, 4 de ellos son iguales y los otros 3 son distintos de estos y distintos entre sí.**

**(a) ¿De cuántas formas se pueden repartir si cada niño lleva un libro?**

Repartimos primeros los diferentes.

V(7,3) = 7! / 3!.

El orden de los iguales no importa. Hay 7!/3! posibilidades.

**(b) ¿De cuántas formas se pueden repartir si algún niño puede quedarse sin libro?**

Repartimos primero los diferentes.VR(7,3) = 7^3

Repartimos ahora los iguales. CR(7,4) = 10|3

Hay 7^3 \* 10|3 posibilidades.

**(c) ¿De cuántas formas se pueden repartir si algunos niños pueden llevar 2 o más libros diferentes?**

Repartimos los libros diferentes. Pueden repetirse por ser diferentes.

VR(7,3) = 7^3

Repartimos los libros iguales. No pueden repetirse.

C(7,4) = 7|4 = 7|3

7^3 \* 7|3

**13. ¿Cuántas secuencias con m ceros y n unos hay de modo que dos unos consecutivos estén separados por al menos dos ceros (se supone que m ≥ 2(n − 1))?**

Sean x0, x1 …, xn los espacios al principio y al final de la cadena, además de los espacios entre los unos.

Debe cumplirse que x0+...+xn = m. Además, todo xi para i=1…n-1 debe ser mayor o igual a 2.

Esto es equivalente a calcular las soluciones a la ecuación y0 + … + yn = m -2\*(n-1), pues le restamos 2 a todo x.

Las soluciones totales son CR(n+1, m-2(n-1)).

**14. Utilizando un alfabeto de 26 letras, queremos transmitir mensajes formados por 10 letras separadas, cada dos consecutivas, por un número entero mayor que 3. ¿Cuántos mensajes son posibles si la suma de los números tiene que ser 43, las letras deben ser distintas y tanto su ordenación como la de los números son significativas?**

Donde xi es una letra y ni es un entero mayor que 3.

Tenemos que colocar 10 letras, de las 26 que existen, en 10 posiciones, tales que las letras sean distintas.

V(26,10) = 26!/10! = 26\*25\*24\*23\*22\*21\*20\*19\*18\*17

Ahora colocamos los 9 números, teniendo en cuenta que son mayores que 3 y su suma es 43.

x1+ … x9 = 43.

Dado que todos son mayores que 3, podemos determinar sin perder precisión que:

y1 + … + y9 = 7

El número de soluciones es C(7+9-1,7) = 15|7

Tiene el mismo número de posibilidades que el caso previo.

El número total de mensajes es 26!/10! \* 15|7

**15. Tenemos una red formada por 25 ordenadores conectados en serie y numerados del 1 al 25. Por razones de eficiencia queremos dividirla. (a) ¿De cuántas formas podemos dividirla en 5 subredes de ordenadores consecutivos, cada una de ellas con, al menos, 3 ordenadores? (b) Si sólo necesitamos 20 ordenadores, ¿de cuántas maneras podemos prescindir de 5 ordenadores y formar 5 subredes de ordenadores consecutivos con, al menos, 3 ordenadores en cada una**

a)

x1 x2 x3 x4 x5 x6 x7 x8 x9 x10 x11 x12 x13 x14 x15 x16 x17 x18 x19 x20 x21 x22 x23 x24 x25

Sean n1, …, n5 las redes y su número de elementos.

Si todas las redes incluyen al menos 3 ordenadores y son 5, calcular 5 redes que incluyen 25 tiene las mismas posibilidades que contar 5 redes que incluyan 10.

CR(10,5) = 14|5 posibilidades (no libro pon 14|4 non ssie porque)

b)

Ahora, n1+...+n5 = 20

Dado que todo ni>= 3, conocemos sólo nos queda repartir en qué redes coincidirán los sobrantes 5 ordenadores. Es decir,

CR(5,5) = 9|5 posibilidades. (no libro pon 9|4)

Además, debemos tener en cuenta que hay (10|5) formas de seleccionar los 5 ordenadores que no vamos a utilizar. En total hay (9|4) \* (10|5)